UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2020-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **31/07/2020**
DACBHCC **13:30-15:00 h**

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)-(PARTE II)

Indicaciones:

- **m : Último dígito no nulo de su código**
  Ejm: 20184070E m=7
- **Escribir claramente sus procedimientos**
- **Solo se aceptará la solución en archivo de extensión pdf desde el Aula Virtual FIM.**

Problema 1

La deflexión ***y*** medida en metros de la punta de un mástil en un bote de vela es:

$$y = \frac{FL^4}{8EI}$$

Dónde:
500<=F<=500.5, medido en N/m es una carga lateral uniforme
L=9 m es la altura del mástil medido con una error de 1%
E=**(m+1)***100±1 Giga Pascales es el módulo de elasticidad del material
I (m^4) es el momento de inercia de la sección

$$I = \pi R^4/4$$

R = 0.1 m es el radio del mástil
π=3.142, aproximado a 3 cifras decimales exactas

a) **(2.5 P)** Si el valor de ***y*** tiene un error relativo de 5 %, determine el error absoluto de la medición del radio R.

b) **(1.5 P)** Truncar ***y*** a 3 decimales y muestre su representación en formato binario de simple precisión según la norma IEEE-754.

Problema 2

Dada la siguiente red eléctrica que se muestra en la siguiente figura 1:

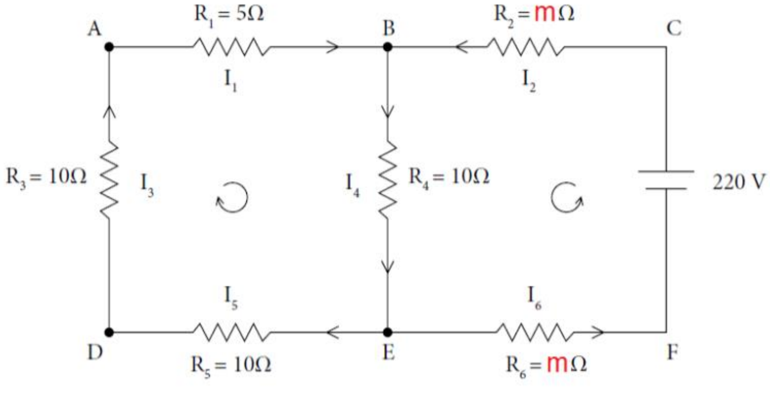

Figura 1

Halle las corrientes eléctricas usando las leyes de Kirchhoff, para ello:

a) **(1.0 P)** Demuestre el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 10 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & m & 0 & 10 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 220 \end{pmatrix}$$

b) **(1.5 P)** Determine la matriz de iteración de Jacobi.

c) **(1.5 P)** A partir del sistema original, se forma un nuevo sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 220 \end{pmatrix}$$

Realice 02 iteraciones utilizando el método de Gauss Seidel, previamente justificando su convergencia. Considere el punto inicial [0.5; 0.5; 0.5]

Problema 3

El siguiente modelo se puede utilizar para estimar el nivel de oxígeno c (mg / l) en un río aguas abajo de una descarga de aguas residuales.

$$c = 10 - 20(e^{-0.15x} - e^{-0.5x})$$

Donde x es la distancia río abajo en kilómetros. Entonces podríamos necesitar el valor de x para el cual la concentración de **oxígeno sea mínimo**, ya que para ciertos peces como la trucha y el salmón deben vivir en concentraciones por encima de 5 mg/l, para poder consumirlos. El problema se resolverá planteando el siguiente procedimiento:

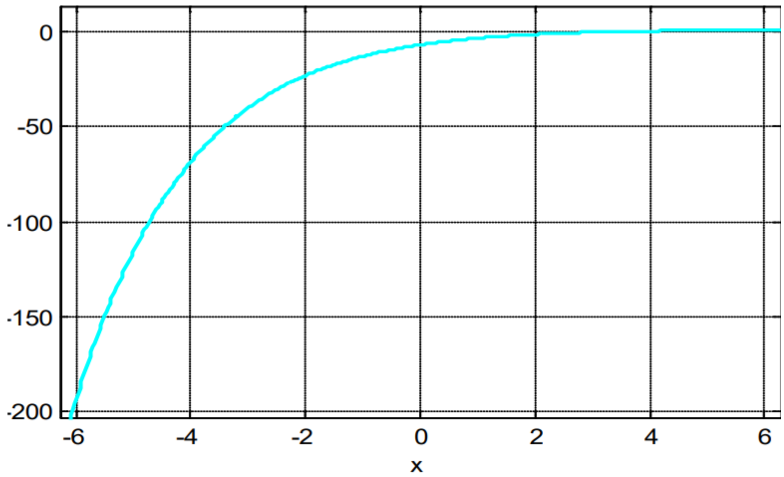

Figura 2 Función dc/dx=0 para encontrar la distancia mínima

a) **(1 P)** Determine la función no lineal para resolver el problema planteado.

b) **(1 P)** Elija de la Figura a un intervalo inicial a=2 + $\boldsymbol{m}/10$ y b=4.5 $-$ $\boldsymbol{m}/10$ y realice las iteraciones indicadas en la tabla, usando el método de bisección con la función del ítem (a).

i	a	b	$\mathbf{x} = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}$	sig $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$	sig $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})<0$	$\boldsymbol{e} = \dfrac{\lvert\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\rvert}{\mathbf{2}}$
0							
1							
2							

c) **(1 P)** Con el último valor de la aproximación obtenida en (b) inicie el método iterativo de Newton Raphson. Realizar la iteración(es) indicadas en la siguiente tabla y determine el porcentaje de error cometido ¿Que concluye acerca de la convergencia?
Se calificará algoritmo y tabla de iteraciones, además del comentario.

it	xi	F(xi)	F'(xi)	-F(xi)/F'(xi)
0				
1				

d) **(1 P)** Evalué si el $g(x)$ dado es punto fijo para esta función? Justifique sin usar iteraciones, en el dominio $a = 2 + \boldsymbol{m}/10$ y $b = 4.5 - \boldsymbol{m}/10$.

$$g(x) = x - F(x)$$

Los Profesores
RCS-RGJ-HPC

Solucionario

Problema 1

Solución
m=1

$$y = \frac{FL^4}{2\pi R^4 E}$$

$$\varepsilon_y = \left|\frac{\partial y}{\partial F}\right| \varepsilon_F + \left|\frac{\partial y}{\partial L}\right| \varepsilon_L + \left|\frac{\partial y}{\partial \pi}\right| \varepsilon_\pi + \left|\frac{\partial y}{\partial R}\right| \varepsilon_R + \left|\frac{\partial y}{\partial E}\right| \varepsilon_E$$

$$\varepsilon_F = 0.25$$
$$\varepsilon_L = 0.01 * 9$$
$$\varepsilon_\pi = 0.5x10^{-3}$$
$$\varepsilon_E = 10^9$$
$$y = 0.0261$$
$$\varepsilon_y = 0.05 * 0.0261 = 0.0013$$

$\left|\frac{\partial y}{\partial F}\right|$ =5.2204e-05

$\left|\frac{\partial y}{\partial L}\right|$=0.0116

$$\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right| = 0.0083$$

$\left|\frac{\partial y}{\partial R}\right|$=1.0446

$\left|\frac{\partial y}{\partial E}\right|$=1.3058e-13
ε_R =1.0853e-04
b)
y=0.026
(-1)^(0)*(1. 10101001111 1101 1111 0100)*2^(011 1100 1-127)
0011 1100 1101 0100 1111 1101 1111 0100

Problema 2

a).

$$I_1 = -I_2 + I_4;$$
$$I_1 = I_3;$$
$$I_3 = I_5;$$
$$I_4 = I_5 + I_6;$$
$$I_1R_1 + I_4R_4 + R_5I_5 + R_3I_3 = 0;\ R_2I_2 + R_4I_4 + R_6I_6 = 220$$

b)

$$T_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{10}{m} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

El método es convergente dado la matriz de coeficientes es diagonal estrictamente dominante.

Tgs=[0 0 0;0 0 0;0 0 0]

Cgs=[0;0;220/m]

X1=Tgs*x0+cgs=[0;0;220/m]

X2=[0;0;220/m]

<u>Problema 3</u>

a) $F(x) = \frac{dc}{dx} = 3e^{-0.15x} - 10e^{-0.5x} = 0$

b) m=1

i	a	b	$\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}$	sig $\boldsymbol{F(a)}$	sig $\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{F(x)F(a)}$<0	$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{\lvert b-a \rvert}}{\mathbf{2}}$
0	2.1	4.4	3.25	-	-	>0	1.15
1	3.25	4.4	3.825	-	+	<0	0.575
2	3.25	3.825	3.5375	-	+	<0	0.2875

c) **(1 P)** Con el último valor de la aproximación obtenida en (b) inicie el método iterativo de Newton Raphson. Realizar la iteración(es) indicadas en la siguiente tabla y determine el porcentaje de error cometido ¿Que concluye acerca de la convergencia? Se calificará algoritmo y tabla de iteraciones, además del comentario.

$$F(x) = \frac{dc}{dx} = 3e^{-0.15x} - 10e^{-0.5x}$$

$$F'^{(x)} == -0.45e^{-0.15x} + 5e^{-0.5x}$$

it	xi	F(xi)	F'(xi)	-F(xi)/F'(xi)
0	3.5375	0.0593	0.5880	-0.1008
1	3.4367	-0.002	0.6281	0.0032

Conclusión:
Se observa que converge (2 c.d.e) a la solución. En la iteración 2 sería 3.4399 con todas sus cifras significativas exactas.

d) **(1 P)** Evalué si el $g(x)$ dado es punto fijo para esta función? Justifique sin usar iteraciones, en el dominio $a = 2 + \boldsymbol{m}/10$ y $b = 4.5 - \boldsymbol{m}/10$.

$$g(x) = x - F(x)$$

$$g'(x) = 1 + 0.45e^{-0.15x} - 5e^{-0.5x}$$

$|g'(b = 4.4)| \leq k = 0.6787 < 1$ Por lo tanto converge en el dominio a la raíz pedida.

m=9
b)

i	a	b	$\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}$	sig $\boldsymbol{F(a)}$	sig $\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{F(x)F(a)}$<0	$\boldsymbol{e} = \frac{\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|}{\mathbf{2}}$
0	2.9	3.6	3.25	-	-	>0	0.35
1	3.25	3.6	3.425	-	-	>0	0.175
2	3.425	3.6	3.5125	-	+	<0	0.0875

c) **(1 P)** Con el último valor de la aproximación obtenida en (b) inicie el método iterativo de Newton Raphson. Realizar la iteración(es) indicadas en la siguiente tabla y determine el porcentaje de error cometido ¿Que concluye acerca de la convergencia?
Se calificará algoritmo y tabla de iteraciones, además del comentario.

$$F(x) = \frac{dc}{dx} = 3e^{-0.15x} - 10e^{-0.5x}$$
$$F'^{(x)} == -0.45e^{-0.15x} + 5e^{-0.5x}$$

it	xi	F(xi)	F'(xi)	-F(xi)/F'(xi)
0	3.5125	0.0444	0.5978	-0.0743
1	3.4382	-0.0011	0.6275	0.0017

Conclusión:
Se observa que converge (2 c.d.e) a la solución. En la iteración 2 sería 3.4399 con todas sus cifras significativas exactas.

d) **(1 P)** Evalué si el $g(x)$ dado es punto fijo para esta función? Justifique sin usar iteraciones, en el dominio $a = 2 + \boldsymbol{m}/10$ y $b = 4.5 - \boldsymbol{m}/10$.

$$g(x) = x - F(x)$$

$$g'(x) = 1 + 0.45e^{-0.15x} - 5e^{-0.5x}$$

$|g'(b = 4.4)| \leq k = 0.4357 < 1$ Por lo tanto converge en el dominio a la raíz pedida.